非消滅定理と収束定理 (Bergman核と代数幾何への応用)

大沢, 健夫

数理解析研究所講究録
第 1613 巻 2008 年 116-124

非消滅定理と収束定理

大沢健夫
(名古屋大・多元数理)

この短文は拙稿[O]の続きである.(補足の意味もある.)
Hermite 多様体 (M,ω) に対し、$H^{p,q}_{(2)}(M,\omega)$ で M の ω に関する (p,q) 型 L^2 コホモロジー群を表す. 1983年、H. Donnelly と C. Fefferman [D-F] は次を示した.

定理 1. D は $\mathbb{C}^n$ の有界強擬凸領域、ω_D は D の Bergman 計量とすれば

$$\dim H^{p,q}_{(2)}(D,\omega_D) = \begin{cases} 0 & p+q \neq n \\ \infty & p+q = n \end{cases}$$

一方、1991年、M. Gromov [G] は次を示した.

定理 2. Ω は $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域であり、双正則自己同型の不連続群の作用によるコンパクトな商多様体をもつとする。このときさらに Ω の Bergman 計量 ω_Ω が d-有界ならば

$$(*) \qquad \dim H^{p,q}_{(2)}(\Omega,\omega_\Omega) = \begin{cases} 0 & p+q \neq n \\ \infty & p+q = n \end{cases}$$

系. Ωが有界対称領域ならば(*)が成立する.

さてMは連結な複素多様体とし, $\widehat{M}\longrightarrow M$はガロア被覆とする. $M=\widehat{M}/\Gamma$, $\Gamma\subset \mathrm{Aut}\,\widehat{M}$, $\Gamma_1=\Gamma\supset\Gamma_2\supset\cdots$は部分群の減小列で$\bigcap_k\Gamma_k=\{id\}$をみたすもの. $M_k=\widehat{M}/\Gamma_k$, $\pi_k:\widehat{M}\longrightarrow M_k$は射影とする。$\widehat{M}$はBergman計量$\widehat{\omega}$をもつとし, ω_kで$\pi_k^*\omega_k=\widehat{\omega}$をみたす$M_k$上の計量を表す.

[O]では$\widehat{M}$のBergman核がM_kのBergman核で近似できるための条件について述べたが、これは$H^{n,0}_{(2)}(\widehat{M})$および$H^{n,0}_{(2)}(M_k)$の再生核についてのことであった. 従って定理2より、一般の次数(p,q)に対するその一般化が問題になるであろう. $(\widehat{M},\widehat{\omega})$が$d$-有界ならば$H^{p,q}_{(2)}(\widehat{M},\widehat{\omega})$は$L^2$調和$(p,q)$形式の空間$\mathcal{H}^{p,q}(\widehat{M},\widehat{\omega})$と同一視できるから

'$\mathcal{H}^{p,q}(\widehat{M},\widehat{\omega})$の再生核$K^{p,q}_{\widehat{M}}$は$\mathcal{H}^{p,q}(M_k,\omega_k)$の再生核$K^{p,q}_{M_k}$の極限か'

というのが拡張された意味でのKazhdanの問題である。

もちろん$K^{p,q}_{\widehat{M}}$や$K^{p,q}_{M_k}$に対してBergman計量に相当するものがあるかどうか分らず、一般には(M_k,ω_k)はd-有界ではなく, 実際$\mathcal{H}^{p,q}(M_k,\omega_k)$が$H^{p,q}_{(2)}(M_k,\omega_k)$に同型でないこともある状況で問題を述べている。しかし[O]の定理4.5の仮定の下では十分大きなkに対して

$$\mathcal{H}^{p,q}(M_k,\omega_k)\simeq H^{p,q}_{(2)}(M_k,\omega_k)$$

であり、しかも

$$\lim_{k\to\infty} \pi_k^* K_{M_k}^{p,q} = K_{\tilde{M}}^{p,q} \qquad (広義一様)$$

が成立する。ここではこれを次の形で示そう。

定理3. $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ が完備かつ d-有界であり、${}^{\forall}M_k$ 上の1の分解 $\{\chi_{k,\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$ が存在して次の 1) ～ 3) をみたすとする。

1) 各 (k,μ) に対して連続写像

$$\sigma_{k,\mu} : \operatorname{supp}\chi_{k,\mu} \longrightarrow \tilde{M}$$

が存在して、$\pi_k \circ \sigma_{k,\mu} = id$ となる。

2) $$\lim_{k\to\infty} \sup_{\tilde{M}} \sum_{\mu=1}^{\infty} |\bar{\partial}\chi_{k,\mu}|_{\omega_k} = 0$$

3) 任意のコンパクト集合列 $Q_j \subset \tilde{M}$ $(j=1,2,\cdots)$ に対し、写像 $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ が存在して

$$\chi_{h(j),g(j)} \,|\, \pi_{h(j)}(Q_j) \equiv 1$$

このとき

$$\lim_{k\to\infty} \pi_k^* K_{M_k}^{p,q} = K_{\tilde{M}}^{p,q} \qquad (広義一様)$$

が成立する。

(定理4.5の仮定より上の条件の方が弱いことは明白。)

系. $\widetilde{M}$が有界対称領域であり、$\underbrace{\text{かつ}}_{}$ Mはコンパクト、すべてのΓ_kがΓの正規部分群ならば, $p+q=n$のとき

$$\lim_{k\to\infty} \dim H^{p,q}_{(2)}(M_k, \omega_k) = \infty .$$

(M_kがどのような意味で$\widetilde{M}$の近似になっているかについてはもっと様々な角度から検討されてもよいだろう.)

定理3の証明: 手順はBergman核のときと同様である。
$x_0 \in \widetilde{M}$を固定し、$S \in \mathcal{H}^{p,q}(\widetilde{M}, \widetilde{\omega})$を

$$|S(x_0)|_{\widetilde{\omega}} = \sup\left\{ |f(x_0)|_{\widetilde{\omega}} \,\middle|\, f \in \mathcal{H}^{p,q}(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}), \|f\| = 1 \right\}$$

かつ$\|S\| = 1$をみたすようにとる。このとき、列$S_k \in \mathcal{H}^{p,q}(M_k, \omega_k)$で$k \to \infty$のとき

$$\pi_k^* S_k(x_0) \longrightarrow S(x_0)$$

かつ

$$\|S_k\|_{\omega_k} \longrightarrow 1$$

をみたすものが存在することを示せば十分である。

まず任意の正数εに対し、仮定1), 3)より、(k, μ)および$\widetilde{M}$上の(p,q)形式$\widetilde{S}_k$で

$$\chi_{k,\mu}(\pi_k(x_0)) = 1$$

$$\pi_k^* \chi_{k,\mu} \cdot S \,|\, \sigma_{k,\mu}(\operatorname{supp} \chi_{k,\mu}) = \widetilde{S}_k \,|\, \sigma_{k,\mu}(\operatorname{supp} \chi_{k,\mu})$$

$$\operatorname{supp} \widetilde{S}_k \subset \sigma_{k,\mu}(\operatorname{supp} \chi_{k,\mu})$$

かつ$\|\widetilde{S}_k - S\| < \varepsilon$をみたすものが存在する。

$\hat{S}_k$ を補正して S_k を作るには、まず $\bar{\partial}$ 方程式

$$(\#_k) \qquad \bar{\partial} u_k = \sigma_{k,\mu}^{*} \bar{\partial} \tilde{S}_k$$

を L^2 評価式つきで解く。　ただし $\sigma_{k,\mu}^{*} \bar{\partial} \tilde{S}_k$ はその M_k への自明な延長と同一視している。

そのために、まず $\hat{M}$ 上の方程式

$$(\#^k) \qquad \bar{\partial} u^k = \bar{\partial} \tilde{S}_k$$

を解く。$(\hat{M}, \hat{\omega})$ は d-有界だから、[O] の定理 3.3 より $p+q \neq n$ なら定理 3 の主張は自明なので $p+q=n$ と仮定してよく、このとき $(\#^k)$ は L^2 評価つきで解ける。u^k を $(\#^k)$ の解で

$$\| u^k \| \leq C \| \bar{\partial} \hat{S}_k \|$$

をみたすものとしよう。ただし C は k によらない定数である。

ここで、必要なら $\sigma_{k,\nu}$ $(\nu \neq \mu)$ を $\hat{M} \longrightarrow M_k$ の被覆変換を合成することによって取り直して

$$\sum_{\nu} \chi_{k,\nu} \sigma_{k,\nu}^{*} \tilde{S}_k = \sigma_{k,\mu}^{*} \tilde{S}_k$$

となるようにしておいてから

$$u_{k,1} = \sum_{\nu} \chi_{k,\nu} \sigma_{k,\nu}^{*} u^k$$

とおくと、$u_{k,1}$ は $(\#_k)$ の近似解になる。

実際、

$$\begin{aligned}
&\bar\partial u_{k,1}\\
&= \sum_\nu \bar\partial \chi_{k,\nu}\, \sigma^*_{k,\nu}\, u^k + \sum_\nu \chi_{k,\nu}\, \bar\partial(\sigma^*_{k,\nu}\, u^k)\\
&= \sum_\nu \bar\partial \chi_{k,\nu}\, \sigma^*_{k,\nu}\, u^k + \sum \chi_{k,\nu}\, \sigma^*_{k,\nu}\, \bar\partial \tilde{S}_k\\
&= \sum_\nu \bar\partial \chi_{k,\nu}\, \sigma^*_{k,\nu}\, u^k + \sigma^*_{k,\mu}\, \bar\partial \tilde{S}_k
\end{aligned}$$

であり、2) より右辺第一項の L^2 ノルムは $k\to\infty$ のとき 0 に収束するからである。

$\chi_{k,\nu}$ は 1 の分解だから $\|u_{k,1}\| \le \|u^k\|$.

また、条件 2) より十分大きな k に対して

$$\Big\|\sum_\nu \bar\partial \chi_{k,\nu}\, \sigma^*_{k,\nu}\, u^k\Big\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|u^k\|$$

かつ $\|\bar\partial \tilde{S}_k\| \le \varepsilon/(C+1)$.

$$v_k = \sigma^*_{k,\mu}\,\bar\partial \tilde{S}_k - \bar\partial u_{k,1}$$

とおく。上で $\bar\partial \tilde{S}_k$ に対して $\sigma_{k,\mu}$ を経由して $\hat{M}$ 上の $\bar\partial$ 方程式を解き、$\sigma_{k,\nu}$ を経由して解を M_k 上で貼り合わせたようなことを v_k に対しても行なう。

そのため、補助的に

$$\begin{aligned}
&\pi^*_k\,\bar\partial(\chi_{k,\nu}\, v_k)\,|\,\sigma_{k,\nu}(\mathrm{supp}\,\chi_{k,\nu})\\
&= v^k_\nu\,|\,\sigma_{k,\nu}(\mathrm{supp}\,\chi_{k,\nu})
\end{aligned}$$

をみたす $\hat{M}$ 上の $(p,q+2)$ 形式 v^k_ν をとり、$\bar\partial$ 方程式

$$\bar\partial u_\nu^k = v_\nu^k$$

を L^2 評価つきで解く。必要なら C をとりかえて

$$\|u_\nu^k\| \le \varepsilon^2$$

であるとしてよい。このとき $\pi_k^*(\chi_{k,\nu} v_k) | \sigma_{k,\nu}(\operatorname{supp}\chi_{k,\nu})$ の $\widetilde{M}$ への自明な延長を $\widetilde{\chi_{k,\nu} v_k}$ とすれば

$$\widetilde{\chi_{k,\nu} v_k} - u_\nu^k \in \operatorname{Ker}\bar\partial$$

となる。そこであらためて $\widetilde{M}$ 上で $\bar\partial$ 方程式

$$\bar\partial u^{k,\nu} = \widetilde{\chi_{k,\nu} v_k} - u_\nu^k$$

を L^2 評価つきで解き、$u^{k,\nu}$ を用いて

$$u_{k,2} = \sum_\nu \chi_{k,\nu}\, \sigma_{k,\nu}^*\, u^{k,\nu}$$

とおく。すると $\varepsilon < 1/2$ ならば十分大きな k に対して

$$u_k = \sum_{i=1}^\infty u_{k,i}$$

は収束し、$\|u_k\| \le 2\varepsilon$ かつ $\bar\partial u_k = \sigma_{k,\mu}^* \bar\partial \tilde{S}_k$ をみたす。

よって u_k の $\operatorname{Ker}\bar\partial$ への直交射影を $\hat{u}_k$ とすれば $\hat{S}_k := \sigma_{k,\mu}^* \tilde{S}_k - \hat{u}_k$ は（ $\bar\partial^* \hat{u}_k = 0$ だから ）

$$\hat{S}_k \in \operatorname{Ker}\bar\partial, \quad \|\hat{S}_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 1, \quad \|\bar\partial^* \hat{S}_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

$$|\pi_k^* \hat{S}_k(x_0) - S(x_0)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

をみたす。

従って上と同様に、方程式

$$\bar{\partial}^* v_k = \bar{\partial}^* \hat{S}_k$$

を付帯条件 $\bar{\partial} v_k = 0$ つきで解き、

$$S_k = \hat{S}_k - v_k$$

とおけば

$$S_k \in \mathcal{H}^{p,q}(M_k, \omega_k)$$

$$\| S_k \| \xrightarrow{k \to \infty} 1$$

かつ

$$| \pi_k^* S_k(x_0) - S(x_0) | \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

となる。

References

[D-F] Ann. of Math. 118 (1983), 593-618.

[G] J. Diff. Geom. 33 (1991), 262-292.

[O] 数理研講究録 (この号)

付記. 上記を脱稿後, S.-K. Yeung 氏に次の二つの文献の存在を教わった。

[D] Donnelly, H., Math. Z. 223 (1996), 303-308.

[Y] Yeung, S.-K., Duke Math. J. 73 (1994), 201-226.

[D]は'Kazhdanの収束定理'について, [O]に似たアプローチを与えており, [Y]はここで述べた $H^{p,q}_{(2)}(M_k, \omega_k)$ の次元の挙動について, M_k がすべてコンパクトである場合の漸近評価を導いている。(ちなみに W.-K. To 氏によっても [D]の内容は得られていたそうである。(未公表))

これらの仕事と小論の方法との関連は, 今後の研究課題になり得るかもしれない。(2008/9/06 記)